TD 9 : LE FINANCEMENT DE LA PRODUCTION DES BIENS COLLECTIFS

Question 9.1. *Alfie, Bill et Coco valorisent tous différemment les services de police. La demande d'Alfie pour ce bien public est Q = 40 - 5P, celle de Bill est Q = 80 – 12P, et celle de Coco Q = 100 – 10P. Le coût marginal des services de police est de 12$.*

a. Quel est le niveau socialement optimal de ces services ?

$Q_A = 40 - 5P_A \Leftrightarrow P_A = 8 - (Q_A/5)$

$Q_B = 80 - 12P_B \Leftrightarrow P_B = (20/3) - (Q_B/12)$

$Q_C = 100 - 10P_C \Leftrightarrow P_C = 10 - (Q_C/10)$

$\sum DMP = 8 - (Q/5) + (20/3) - (Q/12) + 10 - (Q/10) = (74/3) - (23Q/60)$

Condition BLS : $\sum DMP = Cm$ soit $(74/3) - (23Q^*/60) = 12 \Leftrightarrow Q^* = 760 / 23 = 33{,}04$

b. Dans un système de prix à la Lindahl, quelle part de l'impôt chaque individu devra t-il payer ?

$P_A = 8 - (Q^*/5) = 1{,}39$ $\quad$ $P_B = (20/3) - (Q^*/12) = 3{,}91$ $\quad$ $P_C = 10 - (Q_*/10) = 6{,}70$

On a une quantité produite unique et des prix personnalisés.

Question 9.2. *On considère une économie comprenant deux consommateurs dont les préférences sont représentées par les fonctions d'utilités suivantes :* $\boldsymbol{U_1(x, M_1) = 2log x + log M_1}$, $\boldsymbol{U_2(x, M_2) = log x + 2log M_2}$, *x désigne la quantité de bien collectif produit dans l'économie et M_1, M_2 représentent la valeur des consommations de biens privés de chaque individu, avec $x>0$, $M_1>0$, $M_2>0$. La production de x unités de bien collectif entraîne un coût total CT=x. Chaque consommateur dispose d'un revenu égal à 15 qu'il répartit entre sa contribution au financement de la production du bien collectif, notée t_i, et sa consommation de biens privés M_i. On a donc $15=M_i + t_i$ pour $i=1,2$. Un vecteur (x,M_1,M_2) définit une allocation, c'est-à-dire une manière de répartir les richesses de l'économie entre la production de bien collectif et la consommation de biens privés.*

a. Définissez l'ensemble des allocations réalisables. On précise qu'une allocation est dite réalisable si elle compatible avec le financement de la production de bien collectif et si elle vérifie les conditions de signe $x>0$, $M_1>0$, $M_2>0$.

Une allocation (x,M_1,M_2) est compatible avec le financement du bien public si : $t_1 + t_2 = CT$

Or, $t_1 = 15 - M_1$ et $t_2 = 15 - M_2$

D'où : $15 - M_1 + 15 - M_2 = x$ soit : $30 - M_1 - M_2 = x$

Compte tenu des conditions de signe, l'ensemble des allocations réalisables (x,M_1,M_2) est donc défini par : $\boxed{\begin{array}{l} x > 0, M_1 > 0, M_2 > 0 \\ x + M_1 + M_2 = 30 \end{array}}$

b. Définissez l'ensemble des optima de Pareto.

La condition BLS s'écrit : $\Sigma TMS_i = Cm(x)$

$$TMS_1 = \frac{\partial U_1/\partial x}{\partial U_1/\partial M_1} = \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{M_1}} = \frac{2M_1}{x} \qquad TMS_2 = \frac{\partial U_2/\partial x}{\partial U_2/\partial M_2} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{M_2}} = \frac{M_2}{2x}$$

$$Cm(x) = \frac{\partial CT}{\partial x} = 1$$

D'où : $\frac{2M_1}{x} + \frac{M_2}{2x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4M_1 + M_2}{2x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4M_1 + M_2 = 2x$

Il faut aussi tenir compte des conditions de réalisabilité définies à la question précédente : $x + M_1 + M_2 = 30 \quad \Leftrightarrow \quad M_1 = 30 - M_2 - x$

En l'intégrant dans la condition BLS, on trouve :

$$4(30 - M_2 - x) + M_2 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 120 - 4M_2 - 4x + M_2 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 120 - 3M_2 = 6x$$

$$\Leftrightarrow \; M_2 = \frac{120-6x}{3} \quad \Leftrightarrow \quad M_2 = 40 - 2x$$

Et $M_1 = 30 - M_2 - x = 30 - 40 + 2x - x = x - 10$

De plus, les conditions de signe ($x > 0$, $M_1 > 0$, $M_2 > 0$) impliquent : $10 < x < 20$

L'ensemble des optima des Pareto est donc défini par les conditions suivantes : $\boxed{\begin{array}{l} M_1 = x - 10 \\ M_2 = 40 - 2x \\ 10 < x < 20 \end{array}}$

c. Déterminez l'optimum de Pareto associé à des prélèvements identiques t_1=t_2.

Les contraintes budgétaires impliquent que si t_1=t_2, on a $M_1 = M_2$ et donc : $x - 10 = 40 - 2x$

Ce qui implique : $\quad 3x = 50 \quad$ soit $\quad x = \frac{50}{3}$

Et : $M_1 = M_2 = \frac{50}{3} - 10 = 40 - \frac{100}{3} = \frac{20}{3}$

L'optimum de Pareto associé à des prélèvements identiques est donc l'allocation : $(\frac{50}{3}; \frac{20}{3}; \frac{20}{3})$.

Cet optimum de Pareto conduit à des contributions : $t_1 = t_2 = 15 - M_i = 15 - \frac{20}{3} = \frac{25}{3}$.

d. Caractérisez l'équilibre de Lindahl, c'est-à-dire l'équilibre avec prix personnalisés. Montrez que c'est un optimum de Pareto.

L'équilibre de Lindahl est défini par la quantité de bien collectif et l'ensemble des prix individuels (p_1 et p_2) qui permettent à chaque individu de maximiser son utilité et à l'entreprise qui produit le bien collectif de maximiser son profit.

- Maximisation du l'utilité de l'individu 1 :

Max. $U_1 = 2\log x_1 + \log M_1$

s.c. $\quad p_1 x_1 + M_1 = 15$

En intégrant la contrainte budgétaire dans la fonction d'utilité, on obtient :

Max. $U_1 = 2\log x_1 + \log(15 - p_1 x_1)$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{2}{x_1} + \frac{-p_1}{15 - p_1 x_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x_1} = \frac{p_1}{15 - p_1 x_1} \quad \Leftrightarrow \quad 30 - 2p_1 x_1 = p_1 x_1$$

$$\Leftrightarrow \quad 3p_1 x_1 = 30 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 x_1 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{10}{p_1}}$$

Il s'agit de la fonction de demande de bien collectif du consommateur 1.

- Maximisation de l'utilité de l'individu 2 :

Max. $U_2 = \log x_2 + 2\log M_2$
s.c. $p_2 x_2 + M_2 = 15$

En intégrant la contrainte budgétaire dans la fonction d'utilité, on obtient :
Max. $U_2 = \log x_2 + 2\log(15 - p_2 x_2)$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2} + 2\frac{-p_2}{15 - p_2 x_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x_2} = \frac{2p_2}{15 - p_2 x_2} \quad \Leftrightarrow \quad 15 - p_2 x_2 = 2p_2 x_2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3p_2 x_2 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad p_2 x_2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_2 = \frac{5}{p_2}}$$

Il s'agit de la fonction de demande de bien collectif du consommateur 2.

- A l'équilibre de Lindahl, les prix personnalisés p_1 et p_2 conduisent les consommateurs à demander la même quantité de bien collectif. On a donc $x = x_1 = x_2$, soit :

$$\frac{10}{p_1} = \frac{5}{p_2} \quad \Leftrightarrow \quad 5p_1 = 10p_2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{p_1 = 2p_2}$$

- Maximisation du profit de l'entreprise :

$\Pi = RT - CT = (p_1 + p_2)x - x = (p_1 + p_2 - 1)x$

Le profit est à son maximum pour : $p_1 + p_2 - 1 = 0$ soit $\boxed{p_1 + p_2 = 1}$

En combinant les 2 conditions ainsi définies, on a : $2p_2 + p_2 = 1$ => $\boxed{p_2 = \frac{1}{3}}$ et $\boxed{p_1 = \frac{2}{3}}$

On en déduit : $x = x_1 = x_2 = \frac{10}{2/3} = \frac{5}{1/3} = 15$ soit $\boxed{x = 15}$

$M_1 = 15 - p_1 x = 15 - \frac{2}{3} \times 15 = 5$ soit $\boxed{M_1 = 5}$

$M_2 = 15 - p_2 x = 15 - \frac{1}{3} \times 15 = 10$ soit $\boxed{M_2 = 10}$

Le vecteur $(x,M_1,M_2)=(15,5,10)$ vérifie les conditions qui caractérisent les optima de Pareto, telles que définies dans la question b.

e. On détermine la production de bien collectif sur la base d'une souscription : chaque individu i détermine librement le montant t_i de la contribution, la quantité de bien collectif étant égale à t_1+t_2. Déterminez l'allocation qui résulte de cette souscription. Est-ce un optimum de Pareto ?

- Pour le consommateur 1 :

L'utilité du premier consommateur s'exprime en fonction des contributions t_1 et t_2 par : $U_1 = 2\log(t_1 + t_2) + \log(15 - t_1)$

L'individu 1 détermine sa contribution t_1 en maximisant U_1 pour t_2 donné. On a :

$$\frac{\partial U_1}{\partial t_1} = \frac{2}{t_1 + t_2} - \frac{1}{15 - t_1} = \frac{30 - 3t_1 - t_2}{(t_1 + t_2)(15 - t_1)} = 0$$

Comme $x = t_1 + t_2 > 0$ et $M_1 = 15 - t_1 > 0$, $\frac{\partial U_1}{\partial t_1}$ est du signe de $30 - 3t_1 - t_2$.

La contribution de l'individu 1 doit être positive ou nulle ($t_1 \geq 0$), il choisit :

$t_1 = \frac{30 - t_2}{3}$ si $t_2 \leq 30$ et $t_1 = 0$ si $t_2 > 30$

Ceci correspond à la fonction de réaction de l'individu 1, c'est-à-dire à la contribution choisie par l'individu 1 lorsque l'individu 2 a choisi t_2.

- Pour le consommateur 2 :

On a : $U_2 = \log(t_1 + t_2) + 2\log(15 - t_2)$ => $\frac{\partial U_2}{\partial t_2} = \frac{1}{t_1 + t_2} - \frac{2}{15 - t_2} = \frac{15 - 2t_1 - 3t_2}{(t_1 + t_2)(15 - t_2)} = 0$

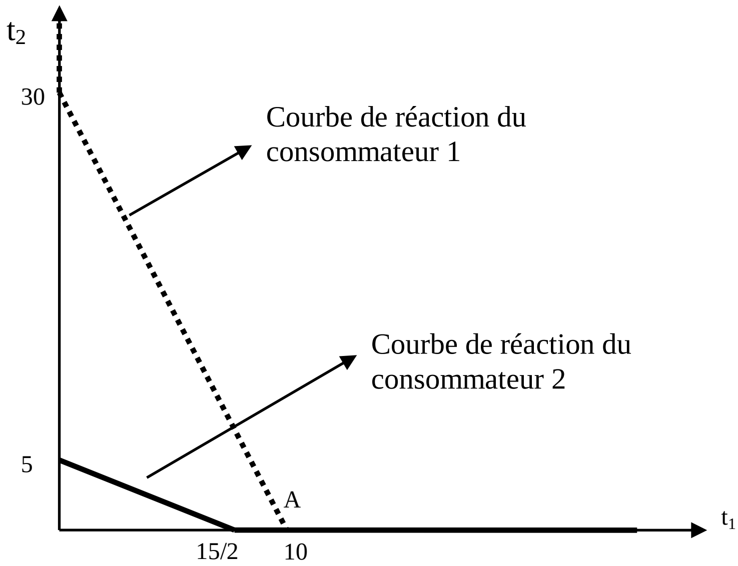
Comme $x = t_1 + t_2 > 0$ et $M_2 = 15 - t_2 > 0$, $\frac{\partial U_2}{\partial t_2}$ est du signe de $15 - 2t_1 - 3t_2$.

La contribution de l'individu 2 doit être positive ou nulle ($t_2 \geq 0$), il choisit :

$t_2 = \frac{15 - 2t_1}{3}$ si $t_1 \leq \frac{15}{2}$ et $t_2 = 0$ si $t_1 > \frac{15}{2}$

Ceci correspond à la fonction de réaction de l'individu 2, c'est-à-dire à la contribution choisie par l'individu 2 lorsque l'individu 1 a choisi t_1.

- A l'équilibre de souscription, les contributions t_1 et t_2 sont une réponse optimale à la décision de l'autre agent. Le couple (t_1, t_2) doit donc être sur les deux courbes de réaction. On peut les représenter ainsi :



L'unique point commun des 2 courbes de réaction est le point A sur la figure, pour lequel on a $t_1=10$ et $t_2=0$.

L'équilibre de souscription conduit donc à : $\boxed{\begin{array}{l} x = t_1 + t_2 = 10 \\ M_1 = 15 - t_1 = 5 \\ M_2 = 15 - t_2 = 15 \end{array}}$

On a alors : $M_1 \neq x - 10$ et $M_2 \neq 40 - 2x$

L'équilibre sous souscription n'est donc pas un optimum de Pareto. Cela s'explique par le fait que l'individu 2 se comporte en passager clandestin : il préfère ne pas apporter de contribution au financement du bien collectif et bénéficier de la contribution de l'individu 1.